IRREDUZIBLE 3-MANNIGFALTIGKEITEN UND IHRE 2-BLÄTTRIGEN ÜBERLAGERUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Harald Boehme

aus Berlin

im Juni 1969

1970

IRREDUZIBLE 3-MANNIGFALTIGKEITEN UND IHRE 2-BLÄTTRIGEN ÜBERLAGERUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Harald Boehme

aus Berlin

im Juni 1969

1. Referent: Prof. Dr. K.P. Grotemeyer

2. Referent: Prof. Dr. G. Ringel

Tag der mündlichen Prüfung: 17. November 1969

Tag der Promotion: 16. FEB. 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt

		Seite
Einleitung		4
0.	Vorbemerkungen	6
1.	Konstruktionen mit zwei Flächen	10
2.	Flächen in 2-blättrigen Überlagerungsräumen	15
3.	Homöomorphismen	21
4.	Ein Beispiel	26
5.	Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten	28
Literatur		33

E i n l e i t u n g

Für geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten bewies Waldhausen [20] den Satz: $\Psi : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ sei ein Isomorphismus, dann gibt es einen Homöomorphismus $g : N \to M$, der Ψ induziert.

Dabei mußten folgende Einschränkungen gemacht werden: (Definitionen in § 0)

i) N,M sind irreduzibel.
ii) M enthält eine inkompressible Fläche.

M heißt dann "genügend groß" ; unser Ergebnis ist der gleiche Satz, falls M eine "größte, nicht genügend große" 3-Mannigfaltigkeit ist, d.h.:

iii) Es gibt eine 2-blättrige Überlagerung $u : \tilde{M} \to M$, und $\tilde{M}$ enthält einen inkompressiblen Torus.

Der Beweis des Homöomorphissatzes benutzt die Zerlegung einer irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit durch inkompressible Flächen (Haken [5]). Eine solche Flächenfolge existiert, falls sie einen Anfang hat. Mit iii) verlegen wir den ganzen Beweis in 2-blättrige Überlagerungsräume. Ist $c : \tilde{M} \to \tilde{M}$ die Decktransformation, $\tilde{f} : \tilde{N} \to \tilde{M}$ eine Abbildung, dann müssen alle Homotopien c-verträglich ausgeführt werden. Die Schwierigkeit besteht nur darin, daß wir mit einer Fläche $F \subset \tilde{M}$ auch die Fläche $c(F) \subset \tilde{M}$ betrachten, wir haben also Konstruktionen an zwei Flächen auszuführen (§ 1). Den Hauptsatz (§ 2) könnte man "$\mathbb{Z}_2$-verträgliches Zerschneiden" nennen, dabei werden Voraussetzungen über $F \cup c(F)$ benutzt, die sich i.a. nur bei Existenz eines inkompressiblen Torus in $\tilde{M}$ erfüllen lassen. Damit folgt der Beweis in $\tilde{N},\tilde{M}$ wie bei Waldhausen (§ 3). Als Nebenergebnis erhalten wir den Homöomorphiesatz für nicht orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten, da diese genügend groß sind.

Durch Bedingung i) wird die Poincaré-Vermutung umgangen. Dazu läßt sich noch jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit eindeutig in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten und Henkel $S^1 \times S^2$ zerlegen (Kneser [7], Milnor [9], Haken [4]).-
Ist M kompakt und $\partial M \neq \emptyset$ dann gilt ein ähnlicher Homöomorphiesatz [20] mit der Einschränkung:

iv) N,M sind irreduzibel und rand-irreduzibel.

Betrachten wir orientierte 3-Mannigfaltigkeiten mit nicht leerem zusammenhängendem Rand, und der Äquivalenzrelation $N \approx M$, falls es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus von N nach M gibt, dann definiert die Randsumme $M_1 \triangle M_2$ auf diesen Äquivalenzklassen eine Monoidstruktur mit Einselement (§ 5). Wir lösen ein Problem von Milnor [9], und beweisen, analog seinem Satz (für die Summe $M_1 \# M_2$), die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren. Die primen 3-Mannigfaltigkeiten mit $\partial M \neq S^2$ sind jene von iv) oder Henkel $S^1 \times D^2$, ist $\partial M = S^2$, entstehen sie aus irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten durch Ausbohrung eines offenen 3-Elements.-

Die Fragestellung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Dr. F. Waldhausen, er machte mich auch auf das Beispiel (§ 4) aufmerksam. Herrn Dr. F. Münzner danke ich für zahlreiche Diskussionen.

0. Vorbemerkungen

Mannigfaltigkeiten und Abbildungen werden in der semilinearen Kategorie betrachtet. Alle Mannigfaltigkeiten N,M sind zusammenhängend und kompakt, sie sind 3-dimensional bis auf § 5 .

G,F sind kompakte Flächen, i.A. orientierbar; l,k sind Kreise, homöomorph der 1-Sphäre; a,b sind Bögen, homöomorph dem 1-Element; diese sind nicht notwendig zusammenhängend.

p,I,D,E,K sind n-Elemente, homöomorph dem Standard-n-Simplex, $n = 0,1,2,3,4$.

Umgebungen von $Y^{n-1} \subset X^n$ sind regulär und klein gegenüber allen anderen Objekten. $X - Y$ bedeutet $(X \setminus U(Y))^-$, geometrisch ist also X an Y zerschnitten, i.A. ist eine Umgebung $U(Y)$ homöomorph $Y \times I$. Schnitte von Y und Y' sind immer transversal, sei also $Z^{n-2} = Y \cap Y'$, dann ist $(Y \times I) \cap Y'$ in $Y \times I$ eine Faser über Z.-

In einer 3-Mannigfaltigkeit sei $F \subset M$, eine Abbildung $f : N \to M$ soll immer transversal bezüglich F gewählt sein, dies läßt sich durch eine Homotopie immer erreichen ([19],1.1). Es gibt dann eine Umgebung $\bar{f}^{-1}(F) \times I$ von $\bar{f}^{-1}(F)$, so daß $f(x,t) = (f(x),t)$; $\bar{f}^{-1}(F) = G$ ist dann ebenfalls eine Fläche. Ist $\partial F \neq \emptyset$, dann soll gelten $F \cap \partial M = \partial F$, und damit $G \cap \partial N = \partial G$.

An einer Fläche $F \subset M$ werden folgende Konstruktionen ausgeführt:

Überziehen an einem 2-Element: Sei $D \subset M$ ein 2-Element mit $D \cap F = b$, wobei b ein Bogen in ∂D . Dann ist D Mittelfläche des 3-Elements $D \times I \subset M$ und $D \times I \cap F = b \times I$ ist in F Umgebung von b . $b \times I$ wird durch $(D \times \partial I) \cup ((\partial D \setminus \mathring{b}) \times I)$ ersetzt, die entstehende Fläche wird

noch leicht deformiert, so daß $F' \cap (D \times I^o) = \emptyset$. Überziehen an einem 1-Element ist analog definiert.

Henkelzerschneiden: Sei $D \subset M$ ein 2-Element mit $D \cap F = \partial D$, $D \times I$ sei wie in 1) definiert. Dann wird $\partial D \times I$ durch $D \times \partial I$ ersetzt.

Definitionen: M sei eine 3-Mannigfaltigkeit. M heißt irreduzibel, wenn jede 2-Sphäre $S \subset M$ ein 3-Element $E \subset M$ berandet.
Sei $F \subset \partial M$ eine Fläche;
M heißt rand-irreduzibel bzgl. F , wenn gilt

i) Keine Komponente von F ist eine 2-Sphäre.
ii) Sei $D \subset M$ ein 2-Element mit $D \cap F = \partial F$, dann ist ∂D Rand eines 2-Elements in F .

Sei $F \subset M$ eine zweiseitige Fläche;
F heißt inkompressibel bzgl. einer Seite, wenn $M' = M - F$ rand-irreduzibel bzgl. einer Schnittfläche ist.
F heißt inkompressibel, falls F bzgl. beider Seiten inkompressibel ist.
Sei $F_o \subset \partial M$ eine Fläche, $F_1 \subset M$ eine zweiseitige Fläche
F_1 heißt rand-inkompressibel bzgl. F_o , wenn gilt

i) Keine Komponente von ∂F_1 berandet ein 2-Element in F_o .
ii) Sei $D \subset M$ ein 2-Element mit $D \cap (F_o \cup F_1) = \partial D$ und $D \cap F_1 = b$ ein Bogen, dann ist b in F_1 einem Bogen in ∂F_1 parallel.

Aus dem Schleifensatz folgt

Lemma 0,1: Ist $F \subset \partial M$ und $F \neq S^2$.
M ist genau dann rand-irreduzibel bzgl. F, wenn gilt
$$\mathrm{Ker}(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0 .$$

Lemma 0.2: Ist $F \subset M$ und $F \neq S^2$.
F ist genau dann inkompressibel, wenn gilt
$$\mathrm{Ker}(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0 .$$

Lemma 0.3: Seien $F_o \subset \partial M$ und $F_1 \subset M$ Flächen, und es sei F_1 rand-inkompressibel bzgl. F_o.
$f : D \to M$ sei eine Abbildung, so daß
$f^{-1}(F_o \cup F_1) = \partial D$ und $f^{-1}(F_1) = b$ ein Bogen.
Dann gibt es eine Abbildung $f' : D \to F_1$, so daß
$f'|b = f|b$, $f'(\partial D - b) \subset \partial F_1$.

Beweis: [21] 1.7

Aus dem Sphärensatz folgt

Lemma 0.4: Ist M orientierbar und irreduzibel, dann ist $\pi_2(M) = 0$.

Mit der Poincaré Vermutung würde sich hiervon die Umkehrung ergeben. (Milnor [9]).

Lemma 0.5: Sei $u : \tilde{M} \to M$ eine 2-blättrige Überlagerung von 3-Mannigfaltigkeiten. M ist genau dann irreduzibel, wenn $\tilde{M}$ ireduzibel ist.

Beweis: 1) $\tilde{M}$ sei irreduzibel. Sei $S \subset M$ eine 2-Sphäre, eine Liftung $\tilde{S} \subset \tilde{M}$ berandet dort ein 3-Element $E \subset \tilde{M}$, sei $u(E) = C_1$, $\partial C_1 = S$. Da $\tilde{S} \cap c(\tilde{S}) = \emptyset$, haben wir folgende Möglichkeiten

a) $E \cap c(E) = \emptyset$.
b) $c(E) \subset E$ oder $E \subset c(E)$.
c) $c(E) \cap E \approx \tilde{S} \times I$([1]), also $\tilde{M} = S^3$, die 3-Sphäre.

Aus a) folgt, C_1 ist ein 3-Element.
Aus b) folgt, $E \subset c(E)$, also $E = c(E)$, E würde also einen Raum überlagern, der von einer projektiven Fläche berandet wird. Diesen gibt es jedoch nicht (Seifert-Threlfall [13]).
Nach c) ist $M = P^3$, der dreidimensionale projektive Raum (Livesay [8]). Aus dem Satz von Alexander [1] folgt, daß S^3 und P^3 irreduzibel sind.

2) M sei irreduzibel.
$c : \tilde{M} \to \tilde{M}$ sei die Decktransformation, ferner sei $S \subset \tilde{M}$ eine 2-Sphäre. Die Anzahl der Doppelkurven $S \cap c(S)$ sei n, da-

nach beweisen wir die Behauptung durch vollständige Induktion. Sei $n = 0$, dann hat $u(S)$ keine Doppelpunkte und berandet ein 3-Element $E \subset M$. Die Liftung ergibt ein 3-Element $\tilde{E} \subset \tilde{M}$ mit $S = \partial\tilde{E}$. Sei $n > 0$, $k \subset S$ sei eine innerste Doppelkurve mit $k = \partial D$, $D \subset S$ ein 2-Element. Es ist $c(D) \cap S = c(D \cap c(S)) = c(\partial D) = \partial(c(D))$, S wird an $c(D)$ zerschnitten, es entstehen 2-Sphären S_1, S_2 mit weniger Doppelkurven. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es 3-Elemente $E_i \subset \tilde{M}$, so daß $S_i = \partial E_i$, $i = 1,2$. Da $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ gibt es die gleichen Möglichkeiten wie in 1).
Falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ist $E = E_1 \cup E_2 \cup (c(D) \times I)$, falls $E_2 \subset E_1$ ist $E = (E_1 \setminus (E_2 \cup (c(D) \times I)))^-$ ein 3-Element mit $S = \partial E$.

1. Konstruktionen mit zwei Flächen

Lemma 1.1: Sei $f : E \to I$ eine Abbildung, f transversal bzgl. $\frac{1}{2}$, $f^{-1}[0,\frac{1}{2}] \cap \partial E = A$. Dann gibt es für jede Umgebung U von A eine Abbildung g, $g \simeq f$ rel. ∂E, mit

1) g ist transversal bzgl. $\frac{1}{2}$.
2) $g^{-1}(\frac{1}{2}) \subset U$.
3) $g^{-1}(\frac{1}{2})$ ist parallel A.

Beweis: $f'(E) \subset E \times I \subset E \times R$ sei der Graph von f mit der Homöomorphie $f'(E) \approx E$. Sei $\alpha \in E^o$ und $\beta > 1$ eine große Zahl, K sei der Kegel über $f'(E)$ zu $\alpha \times \beta$. Setze

$$g'(E) = \partial(K \cap (E \times I)) \setminus f'(E^o) ,$$

dies ist der Graph einer neuen Abbildung $g : E \to I$, und da K ein 4-Element ist, gilt $g \simeq f$ rel. ∂E.
Sei H die Hyperebene parallel E im Abstand $\frac{1}{2}$, dann ist $f^{-1}(\frac{1}{2}) \approx f'(E) \cap H$ und $g^{-1}(\frac{1}{2}) \approx g'(E) \cap H =$
$= (\partial(K \cap (E \times I)) \setminus f'(E^o)) \cap H = (\partial K \cap H) \setminus (f'(E^o) \cap H)$.
Sei Z der Zylinder über $f'(E)$, dann ist $\partial Z \cap H \approx \partial(f^{-1}[0,\frac{1}{2}])$.
Wird also der Kegel durch den Zylinder ersetzt, ergibt sich $(\partial Z \cap H) \setminus (f'(E^o) \cap H) \approx \partial(f^{-1}[0,\frac{1}{2}]) \setminus (f^{-1}(\frac{1}{2}))^o = A$.
Durch geeignete Wahl von β ist also 2) 3) erfüllt, 1) läßt sich immer erreichen.

N, M seien orientierbare, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten.
$f : N \to M$ eine Abbildung.
F_o, F_1 seien Flächen in M, dann sind $f^{-1}(F_i) = G_i$; $i = 0,1$, Flächen in N.

Lemma 1.2: Sei $b \subset N$ ein Bogen mit $b \cap (G_o \cup G_1) = \partial b$, wobei je ein Endpunkt in G_o und G_1 liegt.
Sei $D \subset N$ ein 2-Element mit $b \subset \partial D$, $D \cap (G_o \cup G_1) = \partial D - b^o$, und $D \cap G_i$, $i = 0,1$, ist je ein Bogen. Dann gibt es eine Abbildung

g, so daß $g \simeq f$ und $\tilde{g}^{-1}(F_o) = G_o'$ aus G_o durch Überziehen längs b entsteht, während $\tilde{g}^{-1}(F_1) = G_1$.

Beweis: Das 3-Element $E \subset N$ sei eine Umgebung von b, so daß

$$\tilde{E} = (E \setminus (E \cap (G_o \times I \cup G_1 \times I)))^-$$

ein 3-Element ist, und $E \cap (G_o \cup G_1)$ eine Umgebung von ∂b in $G_o \cup G_1$. $\tilde{b} = \tilde{E} \cap b$ ist ein Bogen. Sei $z \in F_o \cap F_1 \cap f(\partial D)$, I_i seien die Transversalen von F_i in z , $i = 0,1$, dann gibt es eine Einbettung $I_o \times I_1 \subset M$ mit den Punkten: $z = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $z_o = (\frac{1}{2},0)$, $z_1 = (0,\frac{1}{2})$, $z_2 = (0,0)$. $u_i : I_o \times I_1 \to I_i$ seien die Projektionen, dann ist $F_i' = F_i \cap (I_o \times I_1) = \bar{u}_i^{-1}(\frac{1}{2})$, $i = 1,2$.

In einer Umgebung von $\partial D - b^o$ wird eine transversale Homotopie so ausgeführt, daß $f(\partial b) = \{z_o, z_1\}$ und $f(\partial\tilde{b}) = z_2$. Damit entsteht eine Abbildung $(\tilde{b},\partial\tilde{b}) \to (M - (F_o \cup F_1), z_2)$, sie ist nach Voraussetzung nullhomotop. Wir können also f so deformieren, daß G_i ungeändert bleibt und $f|E = f' : E \to I_o \times I_1$; es ist $f'^{-1}(F_i') = E \cap G_i$, $f' = f_o \times f_1$, $f_i = u_i \circ f$, $i = 0,1$.
$A = \bar{f}_o^1[0,\frac{1}{2}] \cap \partial E = (\partial E \setminus (G_o \times [\frac{1}{2},1]))^-$ ist ein Zylindermantel um b mit einer Dachfläche hinter G_1 . Nach Lemma 1.1 gibt es eine Abbildung g_o , $g_o \simeq f_o$ rel. ∂E , $\bar{g}_o^{-1}(\frac{1}{2})$ ist parallel und beliebig nahe zu A . Wir setzen $g' = g_o \times g_1$, wobei $g_1 = f_1$, dann ist $g' : E \to I_o \times I_1$, $g' \simeq f'$ rel. ∂E . Ferner ist $g'^{-1}(F_o') = g'^{-1}(\bar{u}_o^{-1}(\frac{1}{2})) = (u_o \circ g')^{-1}(\frac{1}{2}) = \bar{g}_o^{-1}(\frac{1}{2})$ und $g'^{-1}(F_1') = \bar{g}_1^{-1}(\frac{1}{2}) = \bar{f}_1^{1}(\frac{1}{2})$. $g : N \to M$ mit $g|E = g'$, $g = f$ sonst , erfüllt die Behauptung.

$F_o \cup F_1$ sei <u>halb-inkompressibel</u> , d.h.

i) F_o, F_1 sind inkompressibel.

ii) In $M' = M - F_o$ ist $F_1 - F_o$ rand-inkompressibel bzgl. einer Schnittfläche.

Die Schnittfläche in ii) ist die <u>h-Seite</u> von F_o .

Lemma 1.3: Sei $D \subset G_1$ ein 2-Element und $D \cap G_o = \partial D$. Dann gibt es eine Abbildung $g, g \simeq f$, so daß $\bar{g}^{-1}(F_o) = G_o'$ durch Henkelzerschneiden von G_o an D entstanden ist, während $\bar{g}^{-1}(F_1) = G_1$.

Beweis: Das 3-Element $E \subset N$ sei eine Umgebung von D wie in 1.2. Es ist $f(\partial D) \simeq 0$ in M, also auch in F_o, da F_o inkompressibel. Da $f(\partial D) \subset F_o \cap F_1$ und $F_o \cap F_1 \neq 0$ in F_o, ist $f(\partial D) \simeq 0$ in $F_o \cap F_1$. Nach einer transversalen Homotopie ist $f(\partial D) = z$, $z \in F_o \cap F_1$. $I_o \times I_1$ sei wie in 1.2 konstruiert, dann ist $(\tilde{D}, \partial\tilde{D}) \to (F_1, z_1)$ ein Element von $\pi_2(F_1 - F_o) = 0$. Wir erhalten also eine Abbildung f, $f|E : E \to I_o \times I_1$ mit $\bar{f}^{-1}(F_1) = G_i$, $i = 0,1$. Es ist $f|E = f_o \simeq f_1$ und $A = \bar{f}_o^{-1}[0, \frac{1}{2}] \cap \partial E = D \times \partial I$.
Der Rest folgt wie in 1.2 mit 1.1.

Lemma 1.4: Sei $D \subset N$ ein 2-Element mit $D \cap (G_o \cup G_1) = \partial D$, $D \cap G_o = b_o$ ein Bogen, und $D \cap (G_o \times \partial I)$ liege auf der h-Seite von G_o. Dann gibt es eine Abbildung g, $g \simeq f$, so daß $\bar{g}^{-1}(F_o) = G_o'$ durch Überziehen von G_o an D entstanden ist, während $\bar{g}^{-1}(F_1) = G_1$.

Beweis: $E \subset N$ sei wie in 1.2 konstruiert, sei $b_1 = D \cap G_1$ und $\tilde{b}_1 = (b_1 \setminus (G_o \times I))^-$. $f|D$ ist eine Abbildung wie in 0.3, also ist $(\tilde{b}_1, \partial\tilde{b}_1) \to (F_1 - F_o, \partial(F_1 - F_o))$ nullhomotop.
Sei $z \in F_o \cap F_1$ und $I_o \times I_1$ wie in 1.2. Nach einer transversalen Homotopie in einer Umgebung von b_1 ist $f(\tilde{b}_1) = z_1$, $f(\partial b_1) = z$. $F_o \times 0$ sei auf der h-Seite von F_o, dann ist $f|\tilde{D} : (\tilde{D}, \partial\tilde{D}) \to (M - (F_o \cup F_1), F_o \times 0)$. Es ist $\partial\tilde{D} \to (F_o \times 0) - F_1)$ nullhomotop, da

$$\mathrm{Ker}(\pi_1(F_o - F_1) \to \pi_1(F_o)) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Ker}(\pi_1(F_o) \to \pi_1(M)) = 0 .$$

Nach einer transversalen Homotopie in einer Umgebung von b_o ist $f(\partial\tilde{D}) = z_2$. Damit ist $[f|\tilde{D}] \in \pi_2(M - (F_o \cup F_1), z_2)$, $\pi_2 = 0$, da mit ([18] 1.8) $M - (F_o \cup F_1)$ irreduzibel.

Schließlich erhalten wir eine Abbildung $f, f|E : E \to I_o \times I_1$ mit $f^{-1}(F_i) = G_i$, $i = 0,1$, das weitere folgt mit 1.1 .

Satz 1.5: Es gibt eine Abbildung g, so daß $g \simeq f$ und
1) G_1 inkompressibel ist
2) G_o inkompressibel bzgl. einer Seite ist.

Beweis: Da F_1 inkompressibel ist, läßt sich zunächst f so deformieren, daß G_1 inkompressibel ([19] 1.1). Mit 1.3 läßt sich erreichen, daß die Kurven von $G_o \cap G_1$ in G_o und in G_1 nicht nullhomotop sind.

1) Sei $D \subset N$ ein 2-Element mit $D \cap G_o = \partial D$, $\partial D \neq 0$ in G_o , und $D \cap (G_o \times \partial I)$ liege auf der h-Seite von G_o .
$D \cap G_1$ besteht aus:
$\varkappa$ Kreisen k ,
α Bögen a von Rand zu Rand,
($\varkappa$ ist die Anzahl der Kreise von $D \cap G_1$).
Sei $\varkappa > 0$, da G_1 inkompressibel berandet jeder Kreis k ein 2-Element in G_1 . D_1 sei davon ein innerstes, D_1 ersetzt das von $k_1 = \partial D_1$ in D berandete 2-Element und wird leicht von G_1 abgehoben.

Sei $\alpha > 0$; a ein innerster Bogen in D . $a \cup \partial D$ berandet in D ein 2-Element D_o wie in 1.4 , durch eine Deformation von f wird G_o über D_o gezogen. Damit erhalten wir $D \cap G_1 = \phi$, und $f(\partial D)$ ist nullhomotop in $F_o - F_1$. Durch eine Deformation von f wird G_o an D zerschnitten, G_1 bleibt fest.

2) Sei $S \subset N$ eine 2-Sphäre, die eine Komponente von G_o ist. Dann ist $S \cap G_1 = \phi$, und S läßt sich wie in [19] 1.1 beseitigen.

Lemma 1.6: Sind F_o, F_1 zwei inkompressible Flächen in M , dann lassen sie sich so deformieren, daß $F_o \cup F_1$ halb-inkompressibel ist.

Beweis: 1) Sei $k \in F_o \cap F_1$ eine innerste geschlossene Kurve in F_o , so daß $k = \partial D$, $D \subset F_o$ ein 2-Element. Da

F_1 inkompressibel, berandet k auch ein 2-Element in F_1 ; wird also an k umgeschaltet, so daß sich diese 2-Elemente vertauschen, werden F_o, F_1 nur deformiert, da M irreduzibel. Ist an allen nullhomotopen Schnitten umgeschaltet, sind F_o, F_1 wieder ohne Singularitäten.

2) Sei $D \cap (F_o \cup F_1) = \partial D$, $D \subset M$ ein 2-Element, so daß $D \cap F_1$ nicht parallel $F_o \cap F_1$. Dann ist auch $D \cap F_o$ nicht parallel $F_o \cap F_1$, da F_1 inkompressibel. $D \cap (F_o \times \partial I)$ liege auf der ausgezeichneten h-Seite, dann wird F_1 längs D überzogen, 1) bleibt erhalten.

2. Flächen in 2-blättrigen Überlagerungsräumen

$\tilde{M}$ sei eine orientierbare, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit. $c : \tilde{M} \to \tilde{M}$ sei ein fixpunktfreier Homöomorphismus mit $c \circ c = id$.

Lemma 2.1: $\tilde{M}$ enthalte eine inkompressible Fläche, dann gibt es eine inkompressible Fläche $F \subset \tilde{M}$, so daß jede Komponente von $F \cap c(F)$ in F nicht nullhomotop ist.

Beweis: Sei zunächst F eine inkompressible Fläche in $\tilde{M}$. Sei $k \subset F \cap c(F)$ eine innerste geschlossene Kurve in F mit $k = \partial D$, wobei D ein 2-Element in F. Da auch $c(F)$ inkompressibel ist, gibt es ein 2-Element D' in $c(F)$, so daß $k = \partial D'$. Es ist $D \cap D' = k$, die 2-Sphäre $D \cup D'$ berandet dann ein 3-Element in $\tilde{M}$. An k wird $F \cup c(F)$ so umgeschaltet, daß sich die 2-Elemente D und D' vertauschen. F wird dabei nur deformiert, es bleibt also $\mathrm{Ker}(\pi_1(F) \to \pi_1(\tilde{M})) = 0$. Durch c wird die Umschaltung auf $c(k)$ übertragen (evtl. $k = c(k)$). Der Rest folgt wie in 1.6.

Wir machen für den Rest von § 2 folgende Voraussetzung: $F \subset \tilde{M}$ sei eine Fläche, $F \cup c(F)$ ist ganz-inkompressibel, d.h.

i) F ist inkompressibel.
ii) In $M' = \tilde{M} - F$ ist $c(F) - F$ rand-inkompressibel (bzgl. beiden Schnittflächen).

Lemma 2.2: $\tilde{M}$ sei geschlossen und enthalte einen inkompressiblen Torus, dann gibt es eine Fläche $F \subset \tilde{M}$, so daß $F \cup c(F)$ ganz-inkompressibel ist.

Beweis: Der Torus sei F. Nach 2.1 sind alle Kurven $F \cap c(F)$ nicht nullhomotop in F. Sei $M' = \tilde{M} - F$, $F' = c(F) - F$ und $D \subset M'$ mit $D \cap (F' \cup \partial M') = \partial D$, $D \cap F' = b$ ein Bogen, so daß b in F' nicht rand-parallel ist. Nach [18] 1.10 ist diese Komponente von F' ein rand-paralleler Kreisring.

b "verbindet" zwei Kurven von $F \cap c(F)$, an diesen wird so umgeschaltet, daß sich die Kreisringe in F und $c(F)$ vertauschen. F bleibt ohne Singularitäten und inkompressibel. Schließlich sind alle rand-kompressiblen Elemente von F' beseitigt.

Sei $\tilde{N}$ mit dem Homöomorphismus $c : \tilde{N} \to \tilde{N}$ eine 3-Mannigfaltigkeit wie $\tilde{M}$, also auch $c \circ c = id$. Eine Abbildung $\tilde{f} : \tilde{N} \to \tilde{M}$ heißt mit c verträglich, falls $\tilde{f} \circ c = c \circ \tilde{f}$. Eine Homotopie $g_t : \tilde{N} \to \tilde{M}$, $t \in I$, heißt c verträglich, falls g_t mit c verträglich ist.
Damit beweisen wir den

Hauptsatz 2.3: $F \subset \tilde{M}$ sei eine ganz-inkompressible Fläche, $\tilde{f} : \tilde{N} \to \tilde{M}$ sei eine mit c verträgliche Abbildung.
Dann gibt es eine mit c verträgliche Homotopie $g_t : \tilde{N} \to \tilde{M}$, $t \in I$, mit $g_o = \tilde{f}$, so daß $g_1^{-1}(F)$ inkompressibel in $\tilde{N}$ ist.

Beweis: Sei $G = \tilde{f}^{-1}(F)$.

Lemma 2.4: Es gibt eine mit c verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$, so daß $G \cap c(G)$ in G keine nullhomotopen Kurven enthält.

Beweis: Sei $\iota \subset G \cap c(G)$ eine in G innerste geschlossene Kurve mit $\iota = \partial D$, $D \subset G$ ein 2-Element mit $D \cap c(G) = \partial D$. Es ist $c(D) \cap D \subset c(G) \cap D = \partial D$ und $c(D) \cap D \subset c(D) \cap G = c(D \cap c(G)) = c(\partial D)$, also $c(D) \cap D \subset \iota \cap c(\iota)$. Sei $\iota = c(\iota)$, dann ist $\tilde{f} : \iota \to F \cap c(F)$ nicht nullhomotop, dies folgt mit der Umlaufzahl. Andererseits ist $\tilde{f}(\iota) \simeq 0$ in $\tilde{M}$, da F inkompressibel $\tilde{f}(\iota) \simeq 0$ in F, also auch in $F \cap c(F)$ nach 2.1. Also ist $\iota \cap c(\iota) = \phi$ und $D \cap c(D) = \phi$, es gibt also eine Umgebung E, so daß $E \cap c(E) = \phi$.
Mit 1.3 wird $c(G)$ an D zerschnitten, durch c wird die Homotopie auf $c(E)$ übertragen, $\tilde{f}$ bleibt mit c verträglich.

1) Sei $D \subset \tilde{N}$ ein 2-Element, so daß $D \cap G = \partial D$, $\partial D \neq 0$ in G. Durch eine c-verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$ soll G an einem solchen 2-Element zerschnitten werden. Dies wäre möglich, falls $D \cap c(D) = \phi$, andererseits darf sich auch $c(G)$ nicht ändern, d.h. $c(G)$ muß an $D \cap c(G)$ fest bleiben.
In allgemeiner Lage ist $\partial D \cap c(\partial D) = \phi$.
$D \cap c(G)$ besteht aus einfach geschlossenen Kurven ($\varkappa$) und Bögen von Rand zu Rand (α). $D \cap c(D)$ besteht aus einfach geschlossenen Kurven (λ) und Bögen (β). Die Schnitte beider Kurvensysteme ergeben sich aus

$$D \cap c(D) \cap c(G) = D \cap c(D \cap G) = D \cap c(\partial D),$$

die Enden von Bögen $D^{\circ} \cap c(D)$ liegen also in $D \cap c(G)$.

$\varkappa$) Betrachten wir zunächst die Kreise von $D \cap c(G)$, die in $c(G)$ nullhomotop sind, k sei in $c(G)$ ein innerster Kreis dieser Art. Es ist $k = \partial B$, wobei $B \subset c(G)$ ein 2-Element ist mit $B \cap D = \partial B$, aus 3.3 folgt $B \cap G = \phi$. Das von k in D berandete 2-Element läßt sich durch B ersetzen und leicht darüber hinweg deformieren. k ist in $D \cap c(G)$ verschwunden, neue Schnitte entstehen nicht, 1) bleibt erhalten.

Seien alle Kreise von $D \cap c(G)$ in $c(G)$ nicht nullhomotop, dann sei k davon ein innerster in D. Es ist $k = \partial D'$, wobei $D' \subset D$ ein 2-Element ist mit $D' \cap c(G) = \partial D'$ und $\partial D' \neq 0$ in $c(G)$.

Wir können also voraussetzen, $D \cap c(G)$ enthält keine geschlossenen Kurven.

λ) An geschlossenen Kurven von $c(D) \cap D$ wird so umgeschaltet, daß sich die berandeten 2-Elemente vertauschen. Nach $\varkappa$) bleibt $D \cap G = \partial D$, und wie in 2.1 ist D nach allen Umschaltungen wieder ohne Singularitäten.
$D \cap c(G)$ besteht jetzt aus einem System $\{a\}$ von Bögen von Rand zu Rand, ihre Anzahl sei α.

$D \cap c(D)$ besteht aus Bögen, im einzelnen:

β_1 Bögen b_1 mit ∂b_1 in einer Komponenten von $\{a\}$,
β_2 Bögen b_2 mit ∂b_2 in zwei Komponenten von $\{a\}$,
β_3 Bögen b_3 mit $\partial b_3 \cap \{a\} = \{1 \text{ Punkt}\}$,
β_4 Bögen b_4 mit $\partial b_4 \cap \{a\} = \phi$, also $\partial b_4 \subset \partial D$.

Wegen $c(D \cap c(D)) = D \cap c(D)$ sind die Schnitte einander zugeordnet, im einzelnen ist $c(b_3) = \hat{b}_3$;
$c(b_1) = b_4$, $c(b_2) = b_4$, also $\beta_1 + \beta_2 = \beta_4$.

β_1) Sei $b_1 \subset D \cap c(D)$ ein Bogen mit $\partial b_1 \subset a$, wobei $a \subset D \cap c(G)$ ein Bogen. $a \cup b_1$ berandet ein 2-Element $B \subset D$, sei b_1 als innerster Bogen dieser Art gewählt. Dann ist $B \cap (c(G) \cup c(D)) = \partial B$ und $B \cap c(B) = \phi$.
Durch eine Homotopie von $\tilde{f}$ wird $c(G)$ als Urbild von $c(F)$ über B hinweggezogen. Durch c auf $c(B)$ übertragen, bleibt die Abbildung mit c verträglich. An $c(b_1) = b_4$ entstehen parallele Schnitte mit G.
Schließlich berandet G disjunkte 2-Elemente D_i $0 \leq i \leq \beta_1$, mit $D_i \subset D$. Da $[\partial D] = \prod_{i=0}^{\beta_1} [\partial D_i] \neq 0$, in $\pi_1(G)$ mit Grundpunkt auf ∂D, ist z.B. für D_o $\partial D_o \neq 0$ in G.
Wir können also annehmen $\beta_1 = 0$.

β_4) Wir betrachten solche Bögen b_4, die mit ∂D ein 2-Element B beranden, für welches gilt $B \cap c(G) = \phi$, $B \cap c(D) = b_4$. Dann ist $B \cap c(B) = \phi$, und G kann durch eine c verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$ über B hinweggezogen werden. Längs $c(b_4) = b_2$ entstehen Schnitte $D \cap c(G)$, α bleibt konstant.
Wir erhalten also ein 2-Element D wie in 1) mit folgenden Eigenschaften:

$D \cap c(G)$ besteht aus α Bögen von Rand zu Rand,
$D \cap c(D)$ besteht aus Bögen der Art b_2, b_3, b_4, wobei

$\beta_2 = \beta_4$, und es gibt keinen innersten Bogen b_4 an ∂D, der keine weiteren Schnitte enthält.

Sei $\tau = (\alpha + 3\beta_2 + \beta_3, \beta_3)$ die Kompliziertheit von D. $\tilde{f}$ sei c-verträglich so deformiert, daß für ein 2-Element $D' \subset D$ alle Eigenschaften von D gelten, und τ in lexicographischer Ordnung minimal ist.
Ist $\tau \neq (0,0)$, dann tritt mindestens einer der beiden Fälle auf:

(1) Es gibt ein 2-Element $B_1 \subset D$, welches von einem Bogen a und ∂D berandet wird und keine weiteren Schnitte enthält, $a \cap \{b_3\} = \emptyset$.

(2) Es gibt ein 2-Element $B_2 \subset D$, welches von einem Bogen b_3, einem Teil a' eines Bogens a und ∂D berandet wird, und keine weiteren Schnitte enthält, $a' \cap \{b_3\} = \emptyset$.

Beweis: Ist $\tau \neq (0,0)$, dann ist $\alpha \neq 0$, da die Enden von b_i, $2 \leq i \leq 3$, in Bögen a liegen. Sei für einen Bogen a $a \cap \{b_3\} = \emptyset$, dann berandet a mit ∂D ein 2-Element B_1'.
Sei $a \cap \{b_3\} \neq \emptyset$, dann gibt es von ∂a ausgehend, einen ersten Endpunkt $\partial b_3 \in a$, $a \cup b_3$ berandet mit ∂D ein 2-Element B_2'. B_i ist von beiden Arten ein innerstes, es ist $i = 1$ oder $i = 2$.

Fall (1): Es ist $c(B_1) \cap B_1 = \emptyset$. Nach 1.4 läßt sich durch eine Homotopie von $\tilde{f}$ G über B_1 hinwegziehen, ohne daß sich $c(G)$ an B_1 ändert. Durch c wird die Homotopie nach $c(B_1)$ übertragen, insgesamt bleibt $\tilde{f}$ mit c verträglich.

Sei $p \in a \cap b_2$, dann entsteht bei $c(p) \in \partial D$ ein neuer Bogen von $D \cap c(G)$, dafür werden b_2 und $c(b_2) = b_4$ in Bögen der Art b_3 verwandelt. Ist γ die Anzahl der Schnitte $a \cap \{b_2\}$, dann ist nach der

Homotopie $\alpha' = \alpha + \gamma - 1$

$$\beta_2' = \beta_2 - \gamma$$

$$\beta_3' = \beta_3 + 2\gamma ,$$

$\alpha' + 3\beta_3' + \beta_3' = \alpha + 3\beta_3 + \beta_3 - 1$; also $\tau' < \tau$.

Wegen der Minimalitätsbedingung kann also Fall (1) nicht eintreten.

Fall (2): Es ist $c(B_2) \cap B_2 = \phi$. Nach 1.2 läßt sich durch eine Homotopie von $\tilde{f}$ G über b_3 hinwegziehen, $b_3 \subset \partial B_3$. Ebenso in $c(b_3) = \hat{b}_3$. Nach der Homotopie ist $\beta_3' = \beta_3 - 2$. {a} erhält jedoch eine weitere Komponente, es ist

$$\alpha' + \beta_3' = \alpha + \beta_3 , \quad \beta_2' = \beta_2 ; \text{ also } \tau' < \tau .$$

Also kann auch der Fall (2) nicht eintreten. Daraus folgt $\tau = 0$.

Damit haben wir ein 2-Element $D \subset \tilde{N}$ mit $D \cap G = \partial D$, $\partial D \neq 0$ in G , und $D \cap c(D) = \phi$, $D \cap c(G) = \phi$. Durch eine c-verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$ wird G an D zerschnitten, G ändert sich sonst nicht.

2) Eine Komponente von G sei eine 2-Sphäre $S \subset \tilde{N}$. Nach 2.3 ist $S \cap c(S) = \phi$. Wie in 0.5 für $n = 0$ gibt es ein 3-Element $E \subset \tilde{N}$, so daß $S = \partial E$ und $E \cap c(E) = \phi$. Mit [19] 1.2 gibt es eine c-verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$, so daß mindestens S in $\tilde{g}^1(F)$ verschwunden ist. Da $S \cap c(G) = \phi$, bleiben alle anderen Komponenten von G ungeändert.

Insgesamt erhalten wir eine c-verträgliche Homotopie, so daß $\tilde{g}_1^1(F)$ inkompressibel ist.

3. Homöomorphismen

$\tilde{N},\tilde{M}$ seien orientierbare, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten, $u : \tilde{M} \to M$, $v : \tilde{N} \to N$ seien 2-blättrige Überlagerungen mit den Decktransformationen c. Eine Fläche $F \subset \tilde{M}$ heißt c-inkompressibel, wenn gilt

i) F ist inkompressibel.
ii) $c(F) = F$.

Bd ii) ist äquivalent mit

ii)' Für jede Komponente F_o von F gilt

$$F_o \cap c(F_o) = \phi \quad \text{oder} \quad F_o = c(F_o) .$$

Lemma 3.1: Enthält M eine zweiseitige, inkompressible Fläche, welche nicht die projektive Ebene ist, dann gibt es eine c-inkompressible Fläche $F \subset \tilde{M}$.

Beweis: Nach Voraussetzungen sei $F' \subset M$, $F = u^{-1}(F')$, dann ist $c(F) = F$. F_o sei eine Komponente von F , dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F_o) & \xrightarrow{j} & \pi_1(\tilde{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle (u|F_o)_*} & & \downarrow{\scriptstyle u_*} \\ \pi_1(F') & \xrightarrow{j} & \pi_1(M) \end{array}$$

j' und $(u|F)_*$ sind monomorph, also auch j; nach Voraussetzung ist $F_o \neq S^2$, also inkompressibel.

Lemma 3.2: Ist $H_1(M)$ nicht endlich, dann sind die Voraussetzungen von 3.1 erfüllt.

Beweis: 1) M sei orientierbar, dann ist dies [19] 1.2.
2) M sei nicht orientierbar, $u : \tilde{M} \to M$ die orientierbare 2-blättrige Überlagerung, $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen.

Nach Serre [14] ist $H_1(\tilde{M}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{u_* \otimes 1} H_1(M) \otimes \mathbb{Q}$ epimorph, es gibt also einen nicht trivialen Homomorphismus

$H_1(\tilde{M}) \xrightarrow{u_*} H_1(M) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$. Wie in 1) ergibt sich daraus eine inkompressible Fläche $F \subset M$, $\lambda \circ u_*$ ist durch die Schnittzahl mit $\bar{u}^1(F)$ gegeben. Da $\tilde{M}$ irreduzibel, ist die Schnittzahl mit einer Sphäre trivial, $\bar{u}^1(F)$ besteht also nicht nur aus Sphären, F also nicht nur aus projektiven Ebenen.

Ist M irreduzibel und kein 3-Element, dann ist in folgenden Fällen $H_1(M)$ nicht endlich:

a) M berandet.
b) M nicht orientierbar.

(Seifert-Threlfall [13], S. 206 und S. 223.

Ist $\partial M \neq \emptyset$ und M nicht orientierbar, ergibt sich für die 1. Betti-Zahl:

$$p^1 \geq 1 + \sum_{i=1}^{r} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} (k_i - 2) \text{ , } h_i, k_i \text{ sind}$$

die Geschlechter der orientierbaren, bzw. nicht orientierbaren Randflächen, $k_i \geq 2$, da $\tilde{M}$ irreduzibel).

Satz 3.3: Sei $\tilde{N} \neq S^3$, $\tilde{f} : \tilde{N} \to \tilde{M}$ eine c-verträgliche Abbildung, $F \subset \tilde{M}$ sei c-inkompressibel. Dann gilt die Behauptung von 2.3.

Beweis: 1) Sei $G = \tilde{f}^{-1}(F)$, dann ist $G \cup c(G)$ eine Fläche in $\tilde{N}$, $v(G)$ ist eine zweiseitige Fläche in N , $v|G$ ist eine Überlagerungsabbildung. Sei $D \subset \tilde{N}$ mit $D \cap G = \partial D$, $\partial D \neq 0$ in G , dann ist $v(D)$ eine singuläre Elementarfläche in N , und $v(\partial D) \neq 0$ in $v(G)$. Nach dem Schleifensatz gibt es ein 2-Element $D_o \subset N$ mit $D_o \cap v(G) = \partial D_o$, $\partial D_o \neq 0$ in $v(G)$. $\tilde{D} \subset \tilde{N}$ sei die Liftung von $D_o \subset N$, dann ist $\tilde{D} \cap G = \partial \tilde{D}$, $\partial \tilde{D} \neq 0$ in G und $\tilde{D} \cap c(\tilde{D}) = \emptyset$. Es gibt also eine c-verträgliche Homotopie g_t, $t \in I$, mit $g_o = \tilde{f}$, so daß $\bar{g}_1^{-1}(G) = G_1$ aus G durch Zerschneiden an $\tilde{D}$ entstanden ist.

2) Sei $S \subset \tilde{f}^{-1}(F)$ eine 2-Sphäre, dann ist

a) $S \cap c(S) = \emptyset$ oder b) $S = c(S)$.

a) S verschwindet wie in 2.3.

b) Da $\tilde{N}$ irreduzibel ist $S = \partial E$, $E \subset \tilde{N}$.

Es ist $E = c(E)$, da sonst $\tilde{N} = E \cup c(E) = S^3$.

E kann jedoch kein 2-blättriger Überlagerungsraum sein.

Theorem 3.4.: Seien N,M irreduzible, orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeiten mit $\partial M = \emptyset$. $u : \tilde{M} \to M$ sei eine 2-blättrige Überlagerung, und $\tilde{M}$ enthalte einen inkompressiblen Torus. $\Psi : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ sei ein Isomorphismus. Dann gibt es einen Homöomorphismus $g : N \to M$, der Ψ induziert.

Beweis: Da N,M asphärisch sind, gibt es eine Abbildung $f : N \to M$, die Ψ induziert . $v : \tilde{N} \to N$ sei die 2-blättrige Überlagerung zur Untergruppe $\Psi^{-1}(u_*(\pi_1(\tilde{M})) \subset \pi_1(N)$. $\tilde{N}$ und $\tilde{M}$ sind dann irreduzibel, orientierbar. Es ist $f_*(v_*(\pi_1(\tilde{N}))) = u_*(\pi_1(\tilde{M}))$, $f \circ v$ läßt sich also zu $\tilde{f}$ liften, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M} \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

$\tilde{f}$ ist mit den Decktransformationen $c : \tilde{N} \to \tilde{N}$ und $c : \tilde{M} \to \tilde{M}$ verträglich, $\tilde{f}$ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\Psi} : \pi_1(\tilde{N}) \to \pi_1(\tilde{M})$.

Nach 2.2 erhalten wir einen Torus $F_o \subset \tilde{M}$, so daß $F_o \cup c(F_o)$ ganz-inkompressibel ist. Nach 2.3 gibt es eine c-verträgliche Homotopie von $\tilde{f}$, so daß $G_o = \tilde{f}^{-1}(F_o)$ inkompressibel in $\tilde{N}$ ist. Im folgenden Diagramm sind also die Senkrechten monomorph.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(G_o) & \xrightarrow{(\tilde{f}|G_o)_*} & \pi_1(F_o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\tilde{N}) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \pi_1(\tilde{M}) \end{array}$$

Also ist $(\tilde{f}|G_o)_*$ monomorph, nach dem Satz von Nielsen läßt sich $\tilde{f}$ in einer Umgebung von G_o deformieren, so daß $\tilde{f}|G_o$ eine Überlagerungsabbildung ist. Auch diese Homotopie läßt sich c-verträglich ausführen. $F_o \cup c(F_o)$ besteht aus Kreisringen, die an den Doppelkurven zusammengesetzt sind, sie werden überlagert durch ebensolche Kreisringe von $G_o \cup c(G_o)$.

Sei $\tilde{M}_1 = \tilde{M} - (F_o \cup c(F_o))$, mit 3.1 gibt es eine c-Hierarchie:

$\tilde{M}_j$, $F_j \subset \tilde{M}_j$, $\tilde{M}_{j+1} = \tilde{M}_j - F_j$, $1 \leq j \leq n$, mit

i) F_j ist c-inkompressibel in $\tilde{M}_j$.

ii) Jede Komponente von $\tilde{M}_{n+1}$ ist ein 3-Element.

Dies folgt aus der Existenz einer Hierarchie in $M_1 = M - u(F)$ (Haken [5], Waldhausen [20]).

Minimalitätsbedingung: $\tilde{f}$ sei c-verträglich, so daß die Anzahl der Komponenten von G_o möglichst klein ist.

Der Beweis ist jetzt analog [20] 6.1; wir haben nur den Fall zu betrachten, daß der Induktionsschritt nicht klappt. Dann ist eine Komponente von $\tilde{N} - G_o$ ein $R \times I$, R ein Torus, $\tilde{f}(R \times \partial I) = S$.

Behauptung: $c(G_o) \cap (R \times I) = \emptyset$.

Sei T ein Kreisring von $c(G_o) \cap (R \times I)$.

1) $\partial T \subset (R \times 0)$. Mit [20] 3.1, 5.5 folgt, T ist parallel einer Fläche in $R \times 0$ und $\tilde{f}(T)$ ist parallel einer Fläche in S . Dies ist ein Widerspruch, da $F_o \cup c(F_o)$ ganz-inkompressibel.

2) ∂T habe je eine Komponente in $R \times 0$ und $R \times 1$. $\tilde{f}(\partial T)$ sind parallele Kurven in S , $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\partial T)) \cap (R \times 0)$ sind ebenfalls parallele Kurven, die in $R \times 0$ einen Kreisring beranden. T ist diesem Kreisring parallel und der Widerspruch folgt wie in 1) .

Dann ist auch $c(R \times I) \cap (R \times I) = \emptyset$, die $\tilde{f}$-Homotopien lassen

sich c-verträglich ausführen; und aus der Minimalitätsbedingung folgt, daß $R \prec I$ als Komponente von $\tilde{N} - G_o$ nicht auftritt.

Korollar 3.5: Seien N,M irreduzible und rand-irreduzible, nicht orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeiten. $\Psi : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ sei ein Isomorphismus, der die periphere Struktur erhält. (Definition [20] 6.2). Dann gibt es einen Homöomorphismus $g : N \to M$, der Ψ induziert.

Beweis: Ψ wird von einer Abbildung $f : (N,\partial N) \to (M,\partial M)$ induziert ([20], 6.3). $u : \tilde{M} \to M$ sei eine 2-blättrige Überlagerung, so daß $\tilde{M}$ orientierbar ist. $v : \tilde{N} \to N$ wird wie in 3.4 konstruiert, f läßt sich liften zu $\tilde{f} : (\tilde{N},\partial\tilde{N}) \to (\tilde{M},\partial\tilde{M})$. $\tilde{f}$ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\Psi} : \pi_1(\tilde{N}) \to \pi_1(\tilde{M})$, der die periphere Struktur erhält. Es folgt, daß auch $\tilde{N}$ orientierbar ist. Nach 3.2 enthält $\tilde{M}$ eine c-inkompressible Fläche.

Der Beweis ergibt sich nun wie in [20] 6.5, dabei verwenden wir eine Hierarchie wie in 3.4, ferner 3.3. Damit wird $\tilde{f}$ insgesamt nur c-verträglich deformiert, und wir erhalten einen c-verträglichen Homöomorphismus $\tilde{g} : \tilde{N} \to \tilde{M}$, der $\tilde{\Psi}$ induziert. Daraus folgt die Behauptung.

4. Ein Beispiel

Wir suchen ein geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M mit den Eigenschaften

i) M ist irreduzibel.

ii)* M enthält keine inkompressible Fläche.

iii) Es gibt eine 2-blättrige Überlagerung $u : \tilde{M} \to M$, und $\tilde{M}$ enthält einen inkompressiblen Torus.

M_o sei ein Seifertscher Faserraum mit der 2-Sphäre S als Zerlegungsfläche und mit drei Ausnahmefasern. Es gelte

a) μ_i seien die charakteristischen Zahlen, dann ist $\mu_i \geq 3$, $i = 1,2,3$.

b) $H_1(M_o)$ ist endlich und enthält einen geraden Torsionskoeffizienten.

M_o existiert, wir setzen etwa

$\pi_1(M_o) = \{a,b,s ; a \neq s , b \neq s , a^4 s = b^4 s = (ab)^4 s = 1\}$,
dabei ist $\mu_i = 4$, $i = 1,2,3$, und $H_1(M_o) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.

Satz 4.1: $M = M_o$ erfüllt i), ii)* und iii).

Beweis:

i) Gilt nach [18] 10.2, 7.1.

ii)* Nach [12] Satz 9 ist $\pi_1(M)$ unendlich, nach [19] 2.2 enthält M keine inkompressible Fläche.

iii) Es gibt einen nicht trivialen Homomorphismus $\pi_1(M) \to H_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, $u : \tilde{M} \to M$ sei die zugehörige 2-blättrige Überlagerung. $\tilde{M}$ ist ein Seifertscher Faserraum mit der Zerlegungsfläche W. u bestimmt eine verzweigte, 2-blättrige Überlagerung der Zerlegungsflächen, $w : W \to S$. ν sei die Anzahl der Verzweigungspunkte, dann gilt

$$\chi(W) = 2\chi(S) - \nu = 4 - \nu .$$

Es ist W orientierbar und $\nu \leq 3$, daraus folgt $\nu = 2$ und W ist die 2-Sphäre; w ist also die 2-blättrige Überlagerung mit Verzweigungen am "Nord- und Südpol".
Unter $u : \tilde{M} \to M$ gibt es eine Ausnahmefaser von M mit zwei homöomorphen Urbildern. Sei das Urbild einer Ausnahmefaser eine gewöhnliche Faser, dann gilt für die charakteristische Zahl $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{(\mu,2)} = 1$, also $\mu = 2$ im Widerspruch zu a). $\tilde{M}$ hat also vier Ausnahmefasern, damit enthält $\tilde{M}$ einen inkompressiblen Torus nach [18] 2.7, 7.3.

5. Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt sind alle Mannigfaltigkeiten mit einer Orientierung versehen. Falls ein orientierungserhaltender Homöomorphismus existiert, schreiben wir $N \approx M$, dies ist eine Äquivalenzrelation.

Wir benutzen den Homogenitätssatz von Newman und Gugenheim [3]:

5.1: In einer n-Mannigfaltigkeit M seien E_i, $i = 1,2$ n-Elemente, $\Psi : E_1 \to E_2$ sei ein Homöomorphismus. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : M \to M$, so daß $\phi|E_1 = \Psi$, und ϕ ist isotop der Identität.

Korollar 5.2: Sei M eine n-Mannigfaltigkeit mit $\partial M \neq \emptyset$ und zusammenhängend. $D_i \subset \partial M$, $i = 1,2$ seien (n-1)-Elemente, $\Psi : D_1 \to D_2$ sei ein Homöomorphismus. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : M \to M$ mit $\phi|D_1 = \Psi$.

Beweis: Es ist $\partial M \times I$ eine Umgebung von $\partial M = \partial M \times 0$. Nach 5.1 gibt es einen Homöomorphismus $\phi|\partial M$ mit $\phi|D_1 = \Psi$. Ferner haben wir eine Isotopie $H : \partial M \times I \to \partial M \times I$ mit $H|(\partial M \times 0) = \phi|\partial M$, $H|(\partial M \times 1) = id$. $\phi : M \to M$ ist definiert durch $\phi|(\partial M \times I) = H$, und $\phi = id$ sonst.

Die Summe: M_1, M_2 seien geschlossene n-Mannigfaltigkeiten, $E_i \subset M_i$ seien n-Elemente, $M_i' = M_i \setminus E_i^o$, $i = 1,2$.

Σ sei der Rand des Standard n-Simplex, dann werden folgende Einbettungen induziert, $i_1 : \Sigma \to M_1$ orientierungserhaltend, und $i_2 : \Sigma \to M_2$ orientierungsumkehrend (indem Σ mit entgegengesetzter Orientierung genommen wird). Die Summe $M_1 \# M_2$ entsteht aus $M_1' \cup M_2'$, indem $x \in \partial E_1$ mit $i_2 i_1^{-1}(x) \in \partial E_2$ identifiziert wird. $M_1 \# M_2$ ist eine geschlossene, orientierte n-Mannigfaltigkeit und nach 5.1

wohldefiniert.

Die Randsumme: M_1, M_2 seien n-Mannigfaltigkeiten mit $\partial M_i \neq \emptyset$ und zusammenhängend, $D_i \subset \partial M_i$ seien (n-1)-Elemente des Randes, $i = 1,2$. Δ sei das Standard (n-1)-Simplex, dann gibt es wie im vorigen Fall Einbettungen $i_1 : \Delta \to M_1$, und $i_2 : \Delta \to M_2$. Die Randsumme $M_1 \Delta M_2$ entsteht aus $M_1 \cup M_2$, indem $x \in D_1$ mit $i_2\, i_1^{-1}(x) \in D_2$ identifiziert wird. $M_1 \Delta M_2$ ist eine orientierte n-Mannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial(M_1 \Delta M_2) \approx \partial M_1 \# \partial M_2$, sie ist nach 5.2 wohldefiniert.

Es gelten noch die Formeln: $M \# S^n \approx M$, $M \Delta D^n \approx M$; $\#$ und Δ sind assoziativ und kommutativ.

Wir betrachten nun alle Mannigfaltigkeiten unter der Voraussetzung: $\partial M \neq \emptyset$ und zusammenhängend.

Ein (n-1)-Element $D \subset M$ mit $D \cap \partial M = \partial D$ zerlegt oder zerlegt nicht. Im ersten Fall zerfällt $M' = M - D$ in M_1 und M_2 und es ist $M \approx M_1 \Delta M_2$. Im zweiten Fall ist M' eine n-Mannigfaltigkeit mit $\partial M' \neq \emptyset$ und zusammenhängend. M entsteht aus M' , indem dort zwei (n-1)-Elemente des Randes identifiziert werden. An M' wird also ein Randhenkel angesetzt, dies ist nach 5.2 wohldefiniert. Ein Randhenkel an D^n ergibt $S^1 \times D^{n-1}$, ein Randhenkel an $M' \approx M' \Delta D^n$ ergibt also $M \approx M' \Delta (S^1 \times D^{n-1})$.

Die Verdopplung: An zwei Exemplaren M_1, M_2 von M induziert $\partial M \subset M$ Einbettungen $i_1 : \partial M \to M_1$ orientierungserhaltend und $i_2 : \partial M \to M_2$ orientierungsumkehrend. Die Verdopplung $\mathfrak{D}(M)$ entsteht aus $M_1 \cup M_2$, indem $x \in \partial M$ mit $i_2\, i_1^{-1}(x) \in \partial M$ identifiziert wird. $\mathfrak{D}(M)$ ist geschlossen und orientiert, ferner enthält $\mathfrak{D}(M)$ eine Fläche ∂M , so daß $\mathfrak{D}(M) - \partial M \approx M_1 \cup M_2$.

Lemma 5.3: Es ist $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2) \approx \mathfrak{D}(M_1) \# \mathfrak{D}(M_2)$.

Beweis: Wir zeigen, $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2)$ wird durch eine (n-1)-Sphäre so zerlegt, daß beide Teile $\mathfrak{D}(M_1)$ bzw. $\mathfrak{D}(M_2)$, bis auf n-Elemente, ergeben. $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2)$ wird durch $\partial M_1 \# \partial M_2$ zerlegt, jede Komponente ist $M_1 \Delta M_2$ und wird durch ein (n-1)-Element D^{n-1} zerlegt, $\partial D^{n-1} \subset \partial M_1 \# \partial M_2$. Es ist $S^{n-1} = \mathfrak{D}(D^{n-1})$ eine zerlegende (n-1)-Sphäre in $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2)$, ∂D^{n-1} ein Äquator von S^{n-1} . In $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2) - S^{n-1}$ werden die entstehenden Ränder durch n-Elemente D_1^n, D_2^n ausgefüllt, gleichzeitig werden in $(\partial M_1 \# \partial M_2) - \partial D^{n-1}$ die entstehenden Ränder durch (n-1)-Elemente D_1^{n-1}, D_2^{n-1} ausgefüllt. Damit erhalten wir zwei Mannigfaltigkeiten N_1, N_2 , so daß $\mathfrak{D}(M_1 \Delta M_2) = N_1 \# N_2$. D_i^n wird durch D_i^{n-1} in zwei n-Elemente D_{i1}^n und D_{i2}^n zerlegt, N_i wird durch ∂M_i in $M_i \Delta D_{i1}^n$ und $M_i \Delta D_{i2}^n$ zerlegt, also ist $N_i \approx \mathfrak{D}(M_i \Delta D_{i1}^n) \approx \mathfrak{D}(M_i)$, $i = 1,2$.

n-Mannigfaltigkeiten, die homöomorph dem n-Element sind, heißen trivial.

Eine nicht triviale n-Mannigfaltigkeit P heißt prim, wenn es keine Zerlegung $P = M_1 \Delta M_2$ gibt , so daß M_i nicht trivial, $i = 1,2$.

Lemma 5.4: $S^1 \times D^2$ ist prim.

Beweis: Sei $p \in S^1$, dann ist $(S^1 \times D^2) - (p \times D^2) = E$ ein 3-Element. Sei $A \subset (S^1 \times D^2)$ ein zerlegendes 2-Element, $A \cap (p \times D^2)$ ist ein System von geschlossenen Kurven und Bögen von Rand zu Rand. Eine innerste Kurve in A berandet ein 2-Element $B \subset A$, $B \cap E = B'$ ist ein 2-Element mit $\partial B' \subset \partial E$. B' berandet nach Alexander [1] ein 3-Element, A kann also deformiert werden, so daß die Schnittkurve wegfällt. Schließlich ist $A \subset E$, und zerlegt dort in 3-Elemente. Eine Komponente von $(S^1 \times D^2) - A$ ist also trivial .

Im Folgenden sei $n = 3$.

Lemma 5.5: Sei $M \neq S^1 \times D^2$ und $\partial M \neq S^2$, dann ist M genau dann prim, wenn M irreduzibel und rand-irreduzibel ist.

Beweis: 1) Sei $M = M_1 \triangle M_2$ nicht trivial, dann gibt es ein 2-Element $D \subset M$, so daß $M - D \approx M_1 \cup M_2$. $D \cap \partial M = \partial D$ berande ein 2-Element in ∂M_1 , dann ist $\partial M_1 = S^2$, aber $M_1 \neq E$, d.h. M ist nicht irreduzibel. Berandet ∂D kein 2-Element in ∂M , dann ist M nicht rand-irreduzibel.

2a) Sei M nicht irreduzibel, dann gibt es eine 2-Sphäre $S \subset M$, die kein 3-Element berandet. a sei ein Bogen von S nach ∂M , $\partial a = (a \cap S) \cup (a \cap \partial M)$. $a \times D$ sei ein kleiner Zylinder um a, so daß $\partial a \times D$ eine Umgebung von ∂a in $S \cup \partial M$ ist. $(S \setminus (\partial a \times D)) \cup (a \times \partial D) = D_o$ ist ein 2-Element in M mit $\partial D_o \subset \partial M$. Da $\partial M \neq S^2$ wird M durch D_o nicht trivial zerlegt.

b) Sei M nicht rand-irreduzibel, dann gibt es ein 2-Element $D \subset M$, so daß $\partial D \subset \partial M$ kein 2-Element berandet. D zerlegt oder zerlegt nicht, im ersten Fall wird M nicht trivial zerlegt. Im zweiten Fall liegt D in einem Randhenkel und es ist $M = M' \triangle (S^1 \times D^2)$. Da $M \neq S^1 \times D^2$ ist M' nicht trivial.

Ist $\partial M = S^2$, dann gibt es eine orientierungsumkehrende Einbettung $i : \partial E \to \partial M$. M_o entsteht aus $M \cup E$, indem $x \in \partial E$ mit $i(x) \in \partial M$ identifiziert wird, M_o ist eine geschlossene, orientierte 3-Mannigfaltigkeit.

Lemma 5.6: Sei M nicht trivial und $\partial M = S^2$, dann ist M genau dann prim, wenn M_o irreduzibel ist.

Beweis: 1) Sei M_o irreduzibel, $D \subset M$ mit $\partial D \subset S = \partial M$. ∂D berandet ein 2-Element $D_1 \subset S$, D_1 wird leicht abgehoben ,

dann ist $S_1 = D \cup D_1$ eine 2-Sphäre mit $S \cap S_1 = \phi$.
S_1 berandet ein 3-Element $E_1 \subset M_o$. Wie in 0.5 ergeben sich drei Fälle:

a) $E \cap E_1 = \phi$, dann berandet D ein 3-Element in M ,
ebenso falls
b) $E \subset E_1$. Die Fälle $E_1 \subset E$ und
c) können nicht eintreten, da $D^o \cap E = \phi$.

2) Sei M prim, $S_1 \subset M_o$ eine 2-Sphäre, $S_1 \not\subset E$. $S \cap S_1$ besteht aus geschlossenen Kurven, eine innerste in S_1 berandet ein 2-Element in E . Dieses ist ([1]) parallel $S = \partial E$, die geschlossene Kurve kann also durch Deformation von S_1 beseitigt werden. Damit ist $S_1 \cap S = \phi$, wie in 5.5 verbinden wir S_1 und S durch einen Tunnel $a \times \partial D$. Da M prim, berandet D_o ein 3-Element E_1 in M . Ist $a \in E_1$, dann ist $(E_1 \setminus (a \times D))^-$ ein von S_1 in M_o berandetes 3-Element, ist $a \cap E_1 = \phi$, dann ist $E \cup E_1 \cup (a \times D)$ eines .

Theorem 5.7: Sei M eine nicht triviale, orientierte, kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit $\partial M \neq \phi$ und ∂M zusammenhängend. Dann ist $M = P_1 \triangle P_2 \ldots \triangle P_m$, wobei die P_i prim , und bis auf Reihenfolge und Homöomorphie eindeutig bestimmt sind , $1 \leq i \leq m$.

Beweis: 1) M läßt sich in eine endliche Summe von primen Mannigfaltigkeiten zerlegen.
$h(\partial M)$ sei das Geschlecht, dann ist
$h(\partial M_1 \# \partial M_2) = h(\partial M_1) + h(\partial M_2)$.

Sei $\mathfrak{D}(M) = N_1 \# N_2 \# \ldots \# N_n$, wobei $N_i \neq S^3$, $1 \leq i \leq n$. Nach Kneser [7] gibt es eine Zahl r , so daß $n < r$.
Sei $M = M_1 \triangle M_2 \ldots \triangle M_n$ mit $n \geq h + r$, dann ist $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M_1) \# \mathfrak{D}(M_2) \# \ldots \# \mathfrak{D}(M_n)$, also $\mathfrak{D}(M_n) = S^3$.
Höchstens h Mannigfaltigkeiten haben als Rand keine 2-Sphäre, wir können also auch annehmen $\partial M_n = S^2$. Nach Alexander ist M_n trivial.

2) Die Eindeutigkeit folgt wie bei Milnor [9] , man muß nur 2-Sphären durch 2-Elemente ersetzen.

L i t e r a t u r

[1] Alexander, J.W.: On the subdivision of 3-space by a polyhedron.
Proc.Nat.Acad.Sc. 10, 6-8 (1924).

[2] Graeub, W.: Die semilinearen Abbildungen
Sitz.-Ber.Akad.Wiss.Heidelberg 1950, math.-nat. Klasse, 4.Abh.

[3] Gugenheim, V.K.A.M.: Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres (I)
Proc.London Math.Soc. 3, 29-53 (1953).

[4] Haken, W.: Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten.
Math.Z. 76, 427-467 (1961).

[5] - : Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I.
Math.Z. 80, 89-120 (1962).

[6] Kervaire, M.A., J. Milnor: Groups of homotopy spheres I.
Ann.of Math. 77, 504-537 (1963).

[7] Kneser, H.: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.
Jber.Deutschen Math.Ver. 38, 248-260 (1929).

[8] Livesay, G.R.: Fixed point free involutions on the 3-sphere.
Ann.of Math. 72, 603-611 (1960).

[9] Milnor, J.: A unique decomposition theorem for 3-manifolds.
Amer.J.Math. 84, 1-7 (1962).

[10] Papakyriakopoulos,C.D.: On Dehn's Lemma and the asphericity of knots.
Ann.of Math. 66, 1-26 (1957).

[11] Schubert, H.: Knoten und Vollringe.
Acta Math. 90, 131-286 (1953).

[12] Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume.
Acta Math. 60, 147-288 (1933).

[13] Seifert, H., W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie.
Teubner, Leipzig, 1934.

[14] Serre, J.P.: Homologie singulière des espaces fibrés.
Ann.of Math. 54, 425-505 (1951).

[15] Spanier, E.H.: Algebraic Topology.
Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[16] Stallings, J.: On the loop theorem.
Ann.of Math. 72, 12-19 (1960).

[17] - : On fibering certain 3-manifolds.
Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice Hall, 1962.

[18] Waldhausen, F.: Eine Klasse von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. I;II.
Inventiones math. 3, 308-333; 4, 87-117 (1967).

[19] - : Gruppen mit Zentrum und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.
Topology 6, 505-517 (1967).

[20] - : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large.
Ann.of Math. 87, 56-88 (1968).

[21] - : The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds.
Ann.of Math. 88, 272-280 (1968).

[22] Zeeman, E.C.: Polyhedral n-manifolds.
I. Foundations. Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice Hall, 1962.

L e b e n s l a u f

Als einziges Kind des Kaufmanns Erwin Boehme und seiner Ehefrau Katharina geb. Drommershausen, wurde ich am 15.8.1941 in Berlin geboren.
In Bad Nauheim ging ich zur Volksschule und kam auch dort auf das Gymnasium.
1954 zogen wir nach Hannover, wo ich die Leibnizschule besuchte und Ostern 1961 die Hochschulreife erwarb.
Im folgenden Sommersemester begann ich mit dem Studium der Mathematik in Göttingen.
Nach drei Semestern wechselte ich zur Freien Universität Berlin, wo ich 1964 die Vordiplomprüfung ablegte.
Danach studierte ich zwei Semester an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und lernte dort die Topologie schätzen.
Wieder in Berlin legte ich 1966 die Diplomprüfung ab, mit einer Arbeit über abelsche Kategorien und Spektralsequenzen.
Seitdem bin ich n.v. Dozent an der Ingenieurakademie.

Die wichtigsten Vorlesungen für mich waren:

Grauert: Differential- und Integralrechnung.
Grotemeyer: Lineare und homologische Algebra.
Ringel: Algebra, Graphentheorie.
Hopf: Einführung in die geometrisch-algebraische Topologie.
Eckmann: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
Dress: Homotopietheorie.

Neben Mathematik beschäftige ich mich mit Versicherungsmathematik, Wirtschaftswissenschaften, Physik, Psychoanalyse, Psychologie und Philosophie.
Insbesondere hörte ich in Physik Vorlesungen bei den Professoren Heitler und Wilking, in Philosophie bei den Professoren Feyerabend und Kanthack.

Druck:

DISSERTATIONSDRUCKSTELLE
der Ernst-Reuter-Gesellschaft
der Förderer und Freunde
der Freien Universität Berlin e. V.
Pächter: Franz Augustin
1 Berlin 33, Garystr. 45